

Exemple G.B*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ 21 & * & * & * \\ * & * & * & * \end{pmatrix}$$

$$3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 7 = 21$$

Exemple 5.22*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad \square$$

Dans cette séance on va voir

- notion de matrice identité
- notion de matrice inversible
- déterminant d'une matrice 2×2

• lien entre produit et la composition de matrices d'applications lin.

• lien entre inverse d'une matrice et l'application réciproque.

[Déf 6.7] On dit que $A, B \in M_{m \times m}(\mathbb{R})$ ($=: M_m(\mathbb{R}) \leftarrow$ espace de matrices carrées de taille m) commutent si $AB = BA$.

Exemple 6.6 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\neq$ $\nabla \nabla \nabla \nabla$ A, B ne commutent pas.

[Déf 6.8] La matrice identité de taille n est la matrice $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ } n lignes n colonnes

[Obs] $\text{id}_{\mathbb{R}^n}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow [\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$

application identité $\uparrow$
 $\mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{x}$

Def. 7.1 Une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ est inversible s'il existe une matrice $B \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $B.A = A.B = I_n$. Alors B est unique (ex 8), on la note A^{-1} .

Quelques propriétés (Prop 5, p. 98 + Prop. 6, p. 102):

(i) $A.(B.C) = (A.B).C$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_{n \times q}(\mathbb{R})$;

(ii) $A.(B+C) = A.B + A.C$, $\forall A \in M_{p \times m}(\mathbb{R})$, $\forall B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$;

(iii) $(B+C).A = B.A + C.A$, $\forall B, C \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, $A \in M_{n \times p}(\mathbb{R})$;

(iv) $(A.B)^T = B^T.A^T$

(vi) $(A.B)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$

(v) $(A^{-1})^{-1} = A$, $(A^T)^T = A$, ...

(vii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

(viii) $I_m.A = A = A.I_n$, $\forall A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

(Preuve de (vi)) $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ inversibles $\Rightarrow AB$ inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

En effet

$$(B^{-1}A^{-1}).(AB) = \underbrace{B^{-1}.A^{-1}.A}_{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}} \quad \underbrace{I_n}} \cdot B = \underbrace{B^{-1}.I_n}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} \cdot B = \underbrace{B^{-1}.B}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} = I_n$$

et

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A \cdot \underbrace{B.B^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{(i)}} \quad \underbrace{I_n}} \cdot A^{-1} = A \cdot I_n \cdot \underbrace{A^{-1}.A}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} = \underbrace{A.A^{-1}}_{\substack{\uparrow \\ \text{(viii)}} \quad \underbrace{I_n}} = I_n$$

□

Lien entre composition d'applications linéaires et produit de matrices (p. 95-96)

Soient $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ et $S: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ deux app. lin. On peut définir

$$[T] = \underbrace{\begin{bmatrix} T(\bar{e}_1) & \dots & T(\bar{e}_n) \end{bmatrix}}_{n \text{ colonnes}} \quad \text{et} \quad [S] = \underbrace{\begin{bmatrix} S(\bar{e}_1) & \dots & S(\bar{e}_m) \end{bmatrix}}_{m \text{ colonnes}} \quad \left. \vphantom{\begin{bmatrix} S(\bar{e}_1) & \dots & S(\bar{e}_m) \end{bmatrix}} \right\} \begin{matrix} \text{mlignes} \\ \text{plignes} \end{matrix}$$

FAIT FONDAMENTAL Alors $S \circ T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ est une application linéaire et

$$[S \circ T] = [S] \cdot [T] \in M_{p \times n}(\mathbb{R})$$

(produit matriciel)

(Preuve) $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Thm S.1}} (S \circ T) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = S \left(T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right) \xrightarrow{\text{Thm S.1}} [S] \cdot T \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = [S] \cdot [T] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \forall x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \Rightarrow [S \circ T] = [S] \cdot [T] \quad \square$

unicité du Thm. S.1.

SLOGAN: Comp. d'app. linéaires = Produit de matrices canoniques associées

Conséquence Comme $[\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$, alors si $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ inversible et lin, = bijective

on a $[T^{-1}] = \overbrace{[T]^{-1}}^{\text{application réciproque de } T}$ (et $[T]$ inversible)
matrice inverse

(Preuve) Comme $T \circ T^{-1} = T^{-1} \circ T = \text{id}_{\mathbb{R}^n}$, alors $[T \circ T^{-1}] = [T^{-1} \circ T] = [\text{id}_{\mathbb{R}^n}] = I_n$
ce qui nous dit que $[T]$ est inversible

FAIT précédent $\xrightarrow{[T] \cdot [T^{-1}] = I_n} [T^{-1] \cdot [T] = I_n}$

$$\text{et } [T]^{-1} = [T^{-1}].$$

□

Pourquoi?

Soit un SEL
 $A \cdot \bar{x} = \bar{b}$

$$(\bar{b} \in \mathbb{R}^m, A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}), \bar{x} \in \mathbb{R}^n)$$

Si $n=m$ et A inversible : alors $A \bar{x} = \bar{b}$ est compatible déterminé et $\bar{x} = A^{-1} \bar{b}$ est solution.

$$\left(\text{car } A \cdot \bar{x} = \bar{b} \Rightarrow \underbrace{A^{-1} \cdot A}_{I_n} \cdot \bar{x} = A^{-1} \bar{b} \Rightarrow \bar{x} = A^{-1} \bar{b} \right)$$

Comment trouver A^{-1} pour A inversible?

§ 7.3. Inversion de matrices 2×2

Thm 7.6 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Alors A est inversible ss, $ad - bc \neq 0$.
In plus, si $ad - bc \neq 0$,
déterminant de $A \rightarrow \det(A)$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

(Exo 5, série 6)

(Preuve) $\Leftarrow$ On suppose que $ad - bc \neq 0$. Alors

$$\frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} da - bc & db - bd \\ -ca + ac & -cb + ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

= 0 = 0

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\begin{matrix} \text{red } = 0 \\ \text{green } = 0 \end{matrix}$

Alors

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ est inversible si } ad-bc \neq 0 \text{ et } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Voir les notes. $\square$

Calcul du noyau d'une application linéaire

Soit $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ app. lin.

Noyau

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : T(\bar{x}) = 0 \right\} = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n : [T] \cdot \bar{x} = 0 \right\}$$

Exemple (Exo 5
série 4)

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 \\ -x_1 + 3x_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 \end{pmatrix} \quad (T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3)$$

Alors

$$[T] = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{Ker}(T) = ?$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(boulet)

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -6x_4 \\ x_2 = -2x_4 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

FER de $[T]$

i.e. $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \text{Ker}(T)$

ssi

$$\begin{pmatrix} -6x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

quelque soit $x_4 \in \mathbb{R}$

i.e.

$$\text{Ker}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} -6x_4 \\ -2x_4 \\ x_4 \\ x_4 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ x_4 \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} : x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$= \text{Vect} \left\{ \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

□

Image

$$\text{Img}(T) = \text{Vect} \{ T(\bar{e}_1), \dots, T(\bar{e}_n) \} \subseteq \mathbb{R}^m$$

$$= \left\{ \underbrace{[T] \cdot \bar{x}}_{x_1 T(\bar{e}_1) + \dots + x_n T(\bar{e}_n)} : \bar{x} \in \mathbb{R}^n \right\}$$

En conséquence, T est surjective ssi $\exists \bar{x} \in \mathbb{R}^n$ tel que $[T] \cdot \bar{x} = \bar{b}$ est compatible $\forall \bar{b} \in \mathbb{R}^m$

Exemple (suite)

$$\left[[T] : \bar{b} \right] = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & b_1 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & b_2 \\ 1 & 2 & 3 & 7 & b_3 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\text{OFL}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & b_3 \end{array} \right)$$

compatible $\forall \bar{b}$
 $\Rightarrow T$ surjective $\square$